ECOLE SUPERIEURE DE PLASTURGIE

CONCOURS D'ENTREE 2002

ACCES EN 1ère ANNEE
CYCLE INGENIEUR

MATHEMATIQUES

Mercredi 5 Juin 2002 de 8 heures à 12 heures

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

La clarté et la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.
Les candidats devront traiter les deux problèmes, qui sont indépendants.
L'énoncé comporte 7 pages.

Problème 1 : algèbre

Soit n entier naturel non nul. On désigne par **E** l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n. On note $B_0 = (\mathbf{1}, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de **E**.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par C_n^k le $k^{\text{ième}}$ coefficient binomial et par $\boldsymbol{R}_k$ le polynôme :

$$\boldsymbol{R}_k = X^k (1 - X)^{n-k} .$$

Tout polynôme $\boldsymbol{P}$ à coefficients réels est identifié à sa fonction polynomiale.

Soit Φ l'application définie pour tout polynôme $\boldsymbol{P}$ de **E** par :

$$\Phi(\boldsymbol{P}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \boldsymbol{P}\left(\frac{k}{n}\right) \boldsymbol{R}_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \boldsymbol{P}\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k},$$

où les $\boldsymbol{P}\left(\frac{k}{n}\right)$ sont les valeurs prises par le polynôme $\boldsymbol{P}$ en chacun des $\frac{k}{n}$.

Dans les parties 1 et 2, on supposera que $n = 3$.

Partie 1 ($n = 3$) :

1) Montrer que $(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3)$ est une famille libre de **E**. En déduire que c'est une base de **E**.

2) Montrer que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel **E**.

3) Vérifier que $\Phi(1) = \mathbf{1}$ et $\Phi(X) = \boldsymbol{X}$.

4) Montrer que la matrice A de Φ dans B_0 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} .$$

Quel est le rang de A ? Φ est-elle bijective ?

5) Déterminer Q_2 et Q_3 polynômes unitaires de degrés respectifs 2 et 3 tels que :

$$\Phi(Q_2) = \frac{2}{3} Q_2 \text{ et } \Phi(Q_3) = \frac{2}{9} Q_3 .$$

6) On pose $B_1 = (\mathbf{1}, X, Q_2, Q_3)$. Justifier que B_1 est une base de **E**.

7) Quelle est la matrice A' de Φ dans B_1 ?

8) Donner la matrice de passage K de B_0 à B_1. Déterminer K^{-1}.

9) Exprimer A à l'aide de A' et de K.

Partie 2 ($n = 3$) : matrices commutant avec A.

A, A' et K sont les matrices définies dans la partie 1.

On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 4. Soit **F** l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que : $AM = MA$.

1) Montrer que **F** est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et soit $N = K^{-1} MK$. Montrer que M commute avec A si et seulement si N commute avec A'.

3) On pose :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix}$$

Si N commute avec A', montrer que : $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{3,4}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{4,2}$ et $\alpha_{4,3}$ sont nuls. Vérifier la proposition réciproque.

4) Soit Ψ l'application définie pour tout M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par : $\Psi(M) = K^{-1} MK$. Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

5) En déduire la dimension de **F**.

Partie 3 (n entier naturel non nul quelconque) :

On rappelle que, pour tout k de $\{0, 1,..., n\}$, $\boldsymbol{R}_k$ désigne le polynôme :

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{X}^k (\mathbf{1} - \boldsymbol{X})^{n-k} \ .$$

On rappelle également que Φ est définie pour tout polynôme $\boldsymbol{P}$ de $\mathbf{E}$ par :

$$\Phi(\boldsymbol{P}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \boldsymbol{P}\left(\frac{k}{n}\right) \boldsymbol{R}_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \boldsymbol{P}\left(\frac{k}{n}\right) \boldsymbol{X}^k (\mathbf{1} - \boldsymbol{X})^{n-k} \ .$$

1) Soit j élément de $\{0, 1,..., n\}$. Etablir : $\boldsymbol{X}^j = \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-j}^k \boldsymbol{R}_{k+j}$.

2) En déduire que $(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n)$ est une famille génératrice, ainsi qu'une base de $\mathbf{E}$.

3) Montrer que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{E}$.

4) Soit $\boldsymbol{P}$ appartenant à $\mathbf{E}$ tel que $\Phi(\boldsymbol{P}) = \mathbf{0}$. Justifier que, pour tout k appartenant à $\{0, 1,..., n\}$, $\frac{k}{n}$ est racine de $\boldsymbol{P}$. Qu'en déduit-on pour le polynôme $\boldsymbol{P}$?

5) Etablir alors que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{E}$.

- Fin du problème 1 -

Problème 2 : analyse

Les trois parties du problème peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Dans le problème **E** est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Etant donné un élément f de **E**, on désigne par $T(f)$ l'application de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\, dt .$$

Partie 1 :

Cette partie est consacrée à la détermination de $T(f)$ sur des exemples.

1) Calculer $T(f)(x)$ lorsque f est l'application constante égale à a sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

2) Calculer $T(f)(x)$ lorsque f est l'application de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, f(t) = \frac{t}{(t+2)^2} .$$

3) Pour tout entier naturel non nul n, on définit l'élément f_n de **E** tel que :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, f_n(t) = t^n .$$

a. Calculer $T(f_n)(x) + T(f_{n+1})(x)$ pour $x > -1$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, T(f_n)(x) = (-1)^n \left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right) .$$

Partie 2 :

Cette partie est consacrée à l'étude de $T(f)$ lorsque f est l'application de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in]-1, +\infty[, f(t) = e^{-t}$. Ainsi : $\forall x \in]-1, +\infty[, T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1) Quel est le sens de variation de $T(f)$ sur $]-1, +\infty[$?

2) Ecrire le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 . Interpréter graphiquement le résultat.

3) a. Vérifier que : $\forall\, t \geq 0\ ,\ 0 \leq \dfrac{e^{-t}}{1+t} \leq e^{-t}$.

b. En déduire que $T(f)$ est bornée sur $[\,0, +\infty\,[$, puis que $T(f)$ admet une limite réelle L en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer L).

4) Montrer que : $\forall\, x \in\,]-1, 0\,]\ ,\ T(f)(x) \leq \ln(\,1 + x\,)$. Quelle est la limite de $T(f)$ en -1^{+} ?

5) Donner une allure de la représentation graphique de $T(f)$ en faisant apparaître sur le dessin les conclusions obtenues dans les questions précédentes.

Partie 3 :

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Soit f un élément de **E** . On suppose que f admet une limite réelle λ en $+\infty$, et on étudie le comportement de $T(f)$ au voisinage de $+\infty$.

a. Montrer que lorsque $x \to +\infty$, $\ln(\,x+1\,) \sim \ln(\,x\,)$ et que $\ln(\,1 + \ln(x)\,) = o(\,\ln(x)\,)$.

b. Dans cette question b. , on suppose que $\lambda = 0$.

i) Montrer que f est bornée sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$.

On pose $M = \sup\{\ |f(t)|\ , t \geq 0\ \}$.

ii) Pour $x \geq 1$, on pose $\alpha(x) = \sup\{\ |f(t)|\ , \ln(\,x\,) \leq t \leq x\ \}$ (on rappelle que $\ln(\,x\,) \leq x$). Montrer qu'il existe $t_x \in [\,\ln(\,x\,), x\,]$ tel que $\alpha(x) = |f(t_x)|$, et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

iii) On écrit alors $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{f(t)}{1+t}\,dt + \int_{\ln x}^{x} \frac{f(t)}{1+t}\,dt$. Montrer que :

$$\forall\, x \geq 1,\ |\,T(f)(x)\,| \leq M \int_0^{\ln x} \frac{dt}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{dt}{1+t}\ .$$

iv) En déduire que $T(f)(x) = o(\,\ln(\,x\,))$ lorsque $x \to +\infty$.

c. On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$. En appliquant le résultat de b. iv) à l'application $g = f - \lambda$, donner un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2) Soit f un élément de **E** vérifiant la condition ($*$) : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $T(f)(x) = xf(x)$.

a. Montrer que f est une application de classe C^1 sur chacun des intervalles I =] –1, 0 [et J =] 0, +∞ [, et que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{x+1} y$ sur I et sur J.

b. Quels sont les éléments de **E** vérifiant ($*$) ?

- Fin du problème 2 -